

مقدمة عن الأعداد الحقيقية

أولاً: ما هي الأعداد الحقيقية؟

عرف الإنسان العدد منذ بدء نشأته، ومع اختراع الكتابة أفرد الإنسان القديم رموزاً يعبر بها عن الأعداد الصحيحة الموجبة، كما عبر في الكتابة المصرية القديمة عن الكسور الاعتيادية. وعرف الإنسان في الحضارات القديمة مفهوم الجذر التربيعي، وأدرك أن بعض الجذور التربيعية للأعداد الصحيحة الموجبة ليست أعداداً صحيحة ولا كسور اعتيادية، كما حاول قدماء المصريين والسومريين واليونانيين فهم كنه الكمية π أو $\sqrt{2}$ (وهي النسبة الثابتة بين طول محيط الدائرة وطول قطرها) باعتبارها عدداً، والتعبير عن هذا العدد فأدركوا عدم إمكان التعبير عنه ككسر اعتيادي إلا بصورة تقريبية. وعلى مر السنين وتعاقب الحضارات درس اليونانيون ثم العرب ثم أوروبو عصر النهضة الأعداد الصحيحة والكسرية وتلك الأعداد التي لا يمكن التعبير عنها بشكل كسري، فأدركوا وجود أعداد جبرية (أي تلك الأعداد التي نحصل عليها كحلول لمعادلات جبرية) وأعداد غير جبرية (وتسمى أعداداً متسامية)، وحصلوا على طرق لتقريب الأعداد غير الكسرية بأعداد كسرية، وشيئاً فشيئاً بدأت ترسم في مخيلة الرياضيين صورة تلك المجموعة من الأعداد التي تضم كل تلك الأصناف المختلفة، وتنتظمها في شكل متجانس تتضح فيه خواصها المشتركة رغم تباينها. ولم نصل إلى الصورة الحالية عن مجموعة الأعداد الحقيقية إلا في نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين على يد كانتور وديدكند.



ثلاثة علماء ساهموا في فهم الأعداد الحقيقية:

أرشميدس (٢١٢ - ٢٨٧ قبل الميلاد)، غياث الدين الكاشي (١٣٨٠ - ١٤٢٩) و جورج كانتور (١٨٤٥ - ١٩١٨)

أنظر أيضاً موسوعة ويكيبيديا

سنبدأ دراستنا إذن بصورة متعددة الجوانب لذلك الكائن الرياضي الحي، الذي نسميه **مجموعة الأعداد الحقيقية**، ونرمز له بالرمز $\mathbb{R}$:

١. التمثيل الهندسي للأعداد الحقيقية (خط الأعداد الحقيقية THE REAL LINE)

يمكننا تمثيل الأعداد الحقيقية بنقاط خط مستقيم (أي خط مستقيم) وذلك بأن نختار على الخط نقطة تمثل الصفر (نسميها نقطة الأصل) ونقطة أخرى تمثل الواحد، ثم نمثل بقية الأعداد بباقي نقاط الخط. من الممكن إثبات أنه في ظل هذا الاختيار (وشروط أخرى) توجد طريقة وحيدة لتمثيل كل عدد حقيقي بنقطة على الخط بحيث تمثل الأعداد المختلفة بنقاط مختلفة. والعكس بالعكس: كل نقطة على الخط تمثل عدداً حقيقياً. باستخدام هذا التمثيل يمكننا أن ندرس خواص الأعداد الحقيقية بشكل بصري، وبالذات الخواص المتعلقة بالترتيب، إذ أن الأعداد التي تقع بين عددين x, y تمثل بنقاط القطعة المستقيمة التي طرفاها هما النقطتان الممثلتان لـ x, y .

٢. العمليات المعرفة على $\mathbb{R}$ (OPERATIONS ON $\mathbb{R}$)

هناك عمليتان أساسيتان معرفتان لأي عددين حقيقيين: عملية الجمع و عملية الضرب، عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية لهما عدة خواص أساسية:

فهما عمليتان إبداليتان (هل تذكر معنى ذلك؟)، وهما عمليتان إدماجيتان (أكتب المعنى بشكل رمزي)،

ولكل منهما عنصر محايد؛ الصفر هو العنصر المحايد للجمع والواحد هو العنصر المحايد للضرب،
كل عدد حقيقي له معكوس جمعي، يسمى سالب العدد،
وكل عدد حقيقي ماعدا الصفر له معكوس ضربي، يسمى مقلوب العدد،
وأخيراً، فإن عملية الضرب تتوزع على الجمع.
هذه الخواص تذكر في عبارة واحدة مختصرة بأن نقول

أن الأعداد الحقيقية مع عمليتي الجمع والضرب تكون حقلاً.

أما العمليات الأخرى فسنجد أن تعريفها يتم باستخدام الجمع والضرب (وربما أدوات أخرى)، فمثلاً نعرف الطرح باستخدام الجمع بأن نقول أن باقي طرح y من x هو العدد z الذي إن جمعناه على y أنتج x ، أو بطريقة رمزية:

$$z = x - y \iff y + z = x, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

عملية القسمة هي عملية جزئية، أي أن عملية قسمة عدد حقيقي على عدد حقيقي آخر ليست دائماً معرفة. بالتحديد: نستطيع أن نقسم عدد حقيقي x على عدد y إذا وفقط إذا كان y لا يساوي الصفر. فتذكر دائماً أن القسمة على الصفر غير معرفة وبالتالي غير ممكنة. وفي حالة ما إذا كان y لا يساوي الصفر فإن خارج قسمة x على y هو العدد الحقيقي t الذي إن ضربناه في y كان الناتج x . أي أن عملية القسمة تعرف باستخدام عملية الضرب. وبطريقة رمزية

$$t = x/y \iff y.t = x, \quad x, y, t \in \mathbb{R}, y \neq 0.$$

هناك أيضاً عملية الرفع لأس صحيح موجب، وهي عبارة عن ضرب متكرر، فلأي عدد حقيقي x ولأي عدد صحيح موجب n يكون

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ مرة}}.$$

كما نعرف أن $x^0 = 1$ لأي عدد حقيقي $x \neq 0$ ، الرفع لأس صحيح سالب يُعرف باستخدام القسمة (أو المعكوس الضربي) فنضع $x^{-n} = 1/x^n$ ، $n \in \mathbb{N}$ لأي $x \neq 0$.
أما موضوع الرفع إلى أس غير صحيح فهو موضوع أكثر تعقيداً نحتاج فيه لمعرفة الدالة الأسية.

٣. ترتيب الأعداد الحقيقية

نعرف أننا يمكننا ترتيب الأعداد الحقيقية باستخدام علاقة الترتيب أقل من ($>$)، فلأي عددين حقيقيين x, y فهناك معنى لأن نسأل ما إذا كان x أقل من y أم لا. وتتميز علاقة الترتيب بثلاثة خواص هامة:

- (١) واحدة من العلاقات $x < y$ أو $x = y$ أو $y < x$ متحققة.
 - (٢) إذا كان $x < y$ فإنه من المستحيل أن يكون $y < x$ أو $x = y$.
 - (٣) إذا كان $x < y$ وكانت $y < z$ فإن $x < z$.
 - ويرتبط الترتيب بعمليتي الجمع والضرب بخاصيتين:
 - (٤) إذا كان $x < y$ فإن $x + z < y + z$.
 - (٥) إذا كان $x < y$ وكان z موجباً فإن $x.z < y.z$.
- بإضافة هذه الخواص إلى خواص عمليتي الجمع والضرب نقول أن :

الأعداد الحقيقية مع عمليتي الجمع والضرب وعلاقة الترتيب تكون حقلاً مرتباً.

من الممكن أن نستعيض عن علاقة أقل من بأي من العلاقات : أكبر من ($>$) ، أقل من أو تساوي ($\leq$) أو أكبر من أو تساوي ($\geq$) . وهذه العلاقات تعرف باستخدام علاقة أقل من على النحو التالي:

$$x > y \iff y < x,$$

$$x \leq y \iff x < y \text{ أو } x = y,$$

$$x \geq y \iff y < x \text{ أو } x = y.$$

لاحظ أن العلاقتان $x < y, x = y$ لا يجوز أن تتحققا معاً.
تمارين: برهن المتباينات التالية

$$\forall x > 0 : \quad x + \frac{1}{x} \geq 2, \quad (١)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad (x + y)^2 \geq 4xy, \quad (٢)$$

$$\forall x, y > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x < y \iff x^n < y^n \quad (٣)$$

ماذا يحدث لو كان x, y كلاهما سالبان؟ أو أحدهما سالباً؟

$$\forall x, y > 0 : \quad x < y \implies 1/x < 1/y \quad (٤)$$

ماذا يحدث لو كان x, y كلاهما سالبان؟

٤. بعض المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ (SOME SUBSETS OF $\mathbb{R}$)

مجموعة الأعداد الطبيعية ، ونرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ ، وتتكون من الصفر وجميع الأعداد الصحيحة الموجبة. مجموعة الأعداد الصحيحة ، ونرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ ، وتتكون من جميع الأعداد الصحيحة، موجبة وسالبة والصفر. مجموعة الأعداد القياسية (أو النسبية أو المنطقية) ، والتي يرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$ ، وهي تلك الأعداد الحقيقية التي يمكن كتابتها على صورة كسر اعتيادي. مجموعة الأعداد غير القياسية ، وهي $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ونلاحظ أن

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

وأن $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ هي مكملة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ وبالتالي فإنهما لا تتقاطعان.

الفترات: وهي نوع من المجموعات الجزئية يمثل هندسياً بقطعة مستقيمة، وهناك ثمانية أنواع من الفترات، فلأي $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث $a \leq b$ نعرف

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{الفترة المغلقة:} \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{الفترة نصف المغلقة:} \\]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{الفترة المفتوحة:} \\]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < +\infty\} && \text{الفترة المفتوحة اللانهائية:} \\ [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < +\infty\} && \text{الفترة المغلقة اللانهائية:} \end{aligned}$$

وسنترك للقارئ كتابة تعريف الفترات $[a, b]$ و $[a, b[$ و $]a, b[$ و $]a, +\infty[$ و $[a, +\infty[$.
تمارين:

(١) أعط أمثلة لعناصر في كل من المجموعات $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ لا تقع في المجموعات التي على يسارها.

(٢) ما هي خواص عمليتي الجمع والضرب على كل من المجموعات السابقة؟

(٣) برهن أن مجموع أي عددين قياسيين هو عدد قياسي. وأن حاصل ضرب أي عددين قياسيين هو عدد قياسي.

(٤) أوجد عددين غير قياسيين بحيث يكون مجموعهما وحاصل ضربهما أعدادا قياسية.

(٥) برهن أن $(\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \setminus \mathbb{N}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

٥. الخاصية الأرشميدية (THE ARCHIMEDEAN PROPERTY)

الخاصية الأرشميدية هي خاصية هامة لمجموعة الأعداد الحقيقية توضح عدم وجود كميات متناهية في الصغر، وهو مفهوم ظهر في البداية لتبرير معنى النهايات. وتصاص هذه

الخاصية كالتالي: إذا أعطينا أي عددين حقيقيين موجبين $x, y > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي n بحيث $n.x > y$.

بعض نتائج الخاصية الأرشميدية:

(١). بتطبيق الخاصية الأرشميدية في حالة $x = 1$ نجد أنه لا يوجد أي عدد حقيقي أكبر من جميع الأعداد الطبيعية.

(٢). ليكن $h > 0$ أي عدد موجب، من الخاصية الأرشميدية نجد أنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n > \frac{1}{h}$ وبالتالي $\frac{1}{n} < h$ ، معنى هذا أن h لا يمكن أن يكون أصغر من جميع الكسور التي على الصورة $\frac{1}{n}$.

(٣). إذا كان $b - a > 1$ فإن الفترة $[a, b]$ لابد أن تحتوي عدد صحيح، لبيان ذلك نلاحظ أن الخاصية الأرشميدية تضمن وجود أعداد صحيحة $n : a < n$ ، نأخذ n_0 أصغر الأعداد الصحيحة التي تحقق ذلك، إذا كان $n_0 \geq b$ فإن $n_0 - 1 \geq b - 1 > a$ وهو ما يناقض اختيارنا لـ n_0 وبالتالي فإن $n_0 < b$.

(٤). ليكن x, y عدداً حقيقيين بحيث $x < y$ ، تضمن لنا الخاصية الأرشميدية وجود عدد طبيعي n بحيث $n(y - x) > 1$ ويؤدي ذلك لأن الفترة $[nx, ny]$ تحتوي عدد صحيح m لأن طولها أكبر من الواحد. من ذلك نستنتج أن

$$nx < m < ny$$

وبالتالي فإن

$$x < \frac{n}{m} < y$$

أي أن هناك عدد قياسي بين العددين x, y .

٦. المجموعات المحدودة والمجموعات غير المحدودة (BOUNDED AND UNBOUNDED SETS)

تعريف الحدود العلوية والحدود السفلية لمجموعة من الأعداد الحقيقية :

لتكن S مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ، و ليكن x عدد حقيقي نقول أن x حد علوي للمجموعة S إذا كان x أكبر من أو يساوي كل عنصر من عناصر S .

لاحظ أن x يمكن أن يكون عنصراً في S أو لا يكون.

إذا كان للمجموعة S حد علوي فإننا نقول أنها محدودة من أعلى.

بالمثل، نقول أن عدداً x هو حد سفلي للمجموعة S

إذا كان x أقل من أو يساوي كل عنصر من عناصر S . وإذا كان للمجموعة S حد سفلي

فإننا نقول أن S محدودة من أسفل.

لاحظ أن المجموعة $\mathbb{N}$ محدودة من أسفل (بالصفر أو بأي عدد سالب) لكنها غير محدودة من أعلى، وعلى العكس المجموعة $]-\infty, 1[$ محدودة من أعلى (بالواحد أو بأي عدد أكبر من الواحد) لكنها غير محدودة من أسفل.

نقول أن المجموعة S محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل.

تمارين:

(١) أعط أمثلة لمجموعات محدودة ولمجموعات غير محدودة.

(٢) برهن أنه إذا كان x حداً علوياً للمجموعة S ، فإن أي عدد أكبر من x هو أيضاً حد علوي لنفس المجموعة.

(٣) برهن أن 1 هو حد علوي للمجموعة $[-1, 1]$.

(٤) برهن أن المجموعة $\{n\pi \mid n \in \mathbb{N}\}$ غير محدودة من أعلى.

(٥) أوجد مجموعة الحدود العلوية للفترة $[0, 1]$ و للفترة $[0, 1[$.

(٦) برهن أنه لو كانت A مجموعة غير خالية فإن أي حد علوي ل A أكبر من أو يساوي أي حد سفلي لها.

العناصر الصغرى والكبرى (LARGEST AND SMALLEST ELEMENTS)

مثال: لنأخذ الفترة $[0, 1]$ ، نلاحظ أن الصفر هو حد سفلي للفترة وفي نفس الوقت هو عنصر من عناصر الفترة، كما أن الواحد هو عنصر من عناصر الفترة وفي نفس الوقت هو حد علوي لها.

مثال: لنأخذ الفترة $[0, 1[$ ، نلاحظ أن الواحد هو حد علوي للفترة لكنه لا ينتمي لها. ونلاحظ أيضا أننا لو أخذنا أي عنصر من عناصر الفترة، وليكن a فسنجد عنصرا آخر في الفترة أكبر من a . بنتج من ذلك أن أي حد علوي للفترة لا يمكن أن ينتمي لها. في حالة ما إذا وجد حد علوي للمجموعة S ينتمي إلى S ، فإن هذا الحد العلوي يسمى **العنصر الأكبر** في S ويرمز له ب $\max S$.

بالمثل يمكن تعريف **العنصر الأصغر** بأنه حد سفلي للمجموعة S ينتمي في نفس الوقت ل S ، ويرمز له ب $\min S$.

من الواضح أن أي مجموعة غير محدودة من أعلى ليس لها عنصر أكبر. لكن كون المجموعة محدودة من أعلى لا يضمن وجود العنصر الأكبر (كما في المثال الثاني). من الواضح أيضا أن العنصر الأكبر - إن وجد - فهو وحيد. كذلك الحال بالنسبة للعنصر الأصغر.

تمارين:

(١) أوجد العنصر الأصغر والأكبر (إن وجد أي منهما) لكل من المجموعات الآتية:

$$\mathbb{Z} \cap [-\sqrt{10}, +\infty[, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 \leq 0\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{x} \geq 3\}.$$

(٢) برهن أن العنصر الأصغر والعنصر الأكبر لأي مجموعة يتساويان إذا وفقط إذا كانت المجموعة مكونة من عنصر واحد.

٧. خاصية الاكتمال THE COMPLETENESS PROPERTY

تتمتع مجموعة الأعداد الحقيقية بخاصية أخرى هامة جدا وهي التي نطلق عليها **خاصية الاكتمال**، وتعتبر هذه الخاصية بشكل ما عن عدم وجود فراغات أو ثغوب على خط الأعداد. تقول هذه الخاصية ببساطة أننا لو أخذنا مجموعة جزئية غير خالية و محدودة من أعلى S من $\mathbb{R}$ ، فإن هناك حد علوي لهذه المجموعة أصغر من باقي الحدود العلوية. بعبارة أخرى أن مجموعة الحدود العلوية لمجموعة غير خالية و محدودة من أعلى يكون لها عنصر أصغر. هذا الحد العلوي الأصغر للمجموعة S يرمز له ب $\sup S$ أو $\text{l.u.b. } S$ ويقال أن $\sup S$ هو أصغر حد علوي للمجموعة S . بالمثل: مجموعة الحدود السفلية لمجموعة غير خالية ومحدودة من أسفل يكون لها عنصر أكبر. ويرمز لأكبر حد سفلي للمجموعة S ب $\inf S$ أو $\text{g.l.b. } S$.

مثال: المجموعة $S = [0, 1[$ لها أصغر حد علوي هو الواحد وأكبر حد سفلي هو الصفر.

مثال: المجموعة $\mathbb{N}$ لها عنصر أصغر هو الصفر وهو أيضا أكبر حد سفلي لها، لكن ليس لها أصغر حد علوي (لماذا؟).

إتفاق: سنتفق على أن $+\infty$ هي أكبر حد سفلي للمجموعة الخالية وأن $-\infty$ هي أصغر حد علوي للمجموعة الخالية.

من أهم نتائج خاصية الاكتمال نذكر النظرية التالية التي تبين أن المنحنى الممثل لدالة متصلة على فترة يكون منحنى متصل بمعنى لأنه بلا قطوع أو أننا يمكننا رسمه دون أن نرفع سن القلم من على الورقة.

نظرية القيم الوسيطة: لتكن $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة على الفترة I ، إذا كانت $[a, b] \subset I$ بحيث $f(a) < f(b)$ ، فإنهُ لأي قيمة λ وسيطة بين $f(a)$ ، $f(b)$ (أي أن $f(a) < \lambda < f(b)$) يوجد $c \in]a, b[$ بحيث $f(c) = \lambda$.

برهان - لتكن

$$A = \{ x \in [a, b] \mid f(y) > \lambda \forall y \in [x, b] \}$$

نعلم أن $b \in A$ وبالتالي فإن $A \neq \emptyset$. كما نعلم أن $a \notin A$ وبالتالي فإن $a < x$ لأي $x \in A$. وبالتالي فإن A محدودة من أسفل. من خاصية الاكتمال نضمن وجود $c \in [a, b]$ بحيث

$$c = \inf A$$

سنبرهن الآن أن $f(c) = \lambda$: لنفرض جدلاً أن $f(c) \neq \lambda$. إذن قيمة $f(c)$ إما أن تكون أقل من λ أو أكبر من λ . **الحالة الأولى:** $f(c) < \lambda$: نأخذ $\epsilon = \frac{\lambda - f(c)}{2}$ ونلاحظ أن

$$|t - f(c)| < \epsilon \implies t < \lambda$$

من اتصال الدالة f عند c فإنه يوجد δ بحيث لأي $y : c - \delta < y < c + \delta$ يكون $|f(y) - f(c)| < \epsilon$ وبالتالي فإن $f(y) < \lambda$. لكن هذا يعني أن $y \notin A$. وبالتالي فإنه لأي $y : c < y < c + \delta$ لا يمكن أن نكون $y \in A$ مما يناقض أن $c = \inf A$.

الحالة الثانية: $f(c) > \lambda$: نأخذ $\epsilon = \frac{f(c) - \lambda}{2}$ ونلاحظ أن

$$|t - f(c)| < \epsilon \implies t > \lambda$$

من اتصال الدالة f عند c فإنه يوجد δ بحيث لأي $y : c - \delta < y < c + \delta$ يكون $|f(y) - f(c)| < \epsilon$ وبالتالي فإن $f(y) > \lambda$. لكن هذا يعني أن $y \in A$. وبالتالي فإنه لأي $y : c - \delta < y < c$ يكون $y \in A$ مما يناقض أن $c = \inf A$. إذن في كلتا الحالتين نصل لتناقض. ومن ذلك نستنتج أن $f(c) = \lambda$.

تمارين:

(١) أثبت أنه إذا كان للمجموعة S عنصراً أكبر فإن هذا العنصر يكون أصغر حد علوي لـ S .

(٢) لكل نوع من أنواع الفترات إبحث عن أصغر حد علوي وأكبر حد سفلي والعنصر الأصغر والعنصر الأكبر (إن وجد أي منهم).

(٣) لتكن $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ دالة تزايدية. برهن أنه يوجد $x_0 \in [0, 1]$ بحيث $f(x_0) = x_0$.

(٤) برهن أن الدالة $f(x) = x^2$ دالة متصلة على $\mathbb{Q} \cap [1, 2]$ وأن $f(1) < 2 < f(2)$. هل يوجد $c \in \mathbb{Q} \cap [1, 2]$ بحيث $f(c) = 2$ ؟

الباب الأول

المتتابعات

١.١ المتتابعات التقاربية ونهاياتها

العديد من الظواهر الطبيعية والرياضية يمكن تمثيلها بـ **متتابعات** ، من المعتاد مثلاً دراسة نمو الفطريات الدقيقة بدراسة عدد الخلايا في الأجيال المتعاقبة، أي أننا ننظر الجيل الأول بعدد معين من الخلايا والجيل الثاني بعدد خلايا هذا الجيل ... وهكذا. بذلك نعرف دالة تعطي لكل عدد طبيعي (ترتيب الجيل) عدد الخلايا المناظر.

في الاقتصاد أيضاً يمكن دراسة التغير في سعر سهم ما في بورصة الأوراق المالية باعتباره دالة في الزمن، لكننا عادة ما نمثل الزمن في هذه الحالة باعتباره **متغيراً متقطعاً** ، فنأخذ سعر السهم كل عدد معين من الدقائق (أو الثواني)، نحصل هنا أيضاً على دالة من $\mathbb{N}$ إلى $\mathbb{R}$ تعطي سعر السهم $x(n)$ عند مرة القياس رقم n .

١.١-١ تعريف: المتباينة هي دالة $x : \mathbb{N} \rightarrow A$ نطاقها مجموعة الأعداد الطبيعية ونطاقها المصاحب يمكن أن يكون أي مجموعة A .
من المعتاد أن نكتب x_n للدلالة على قيمة الدالة عند n بدلاً من $x(n)$ ، ويسمى x_n **العدد رقم n** من المتباينة، كما نكتب $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ لتمثيل المتباينة كلها.

عندما يكون النطاق المصاحب هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ فإننا نقول أن لدينا متباينة من الأعداد الحقيقية، وعندما يكون النطاق المصاحب هو $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ فإننا نقول أن لدينا متباينة من نقاط المستوى أو الفراغ الثلاثي، كذلك إذا كان النطاق المصاحب هو $\mathbb{C}$ فإننا نقول أن لدينا متباينة من الأعداد المركبة.

تقارب متتابعات الأعداد الحقيقية

لتكن لدينا متباينة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من الأعداد الحقيقية، نلاحظ أن النطاق $\mathbb{N}$ ليس له نقط تراكم عدا $+\infty$ ، بالتالي لا يمكن دراسة نهاية المتباينة سوى عند $+\infty$.

١.١-٢ تعريف: يقال أن متباينة الأعداد الحقيقية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **تقاربية** إذا كان لها نهاية حقيقية، أي إذا كان:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$$

١.١-٣ أمثلة:

(١) لئكن $x_n = \frac{1}{n}$ ، بتجربة بعض الحدود نجد أن

n	1	2	...	10	...	100	...	10^6
x_n	1	0.5	...	0.1	...	0.01	...	0.000001

يجعلنا هذا نتوقع أن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. سنثبت صحة هذا التوقع: ليكن $\varepsilon > 0$ معطى ، من الخاصية الأرشيميدية يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $n_0 \varepsilon > 1$ ، وبالتالي نجد أن

$$n > n_0 \implies n\varepsilon > n_0\varepsilon > 1 \implies \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

يثبت هذا أن نهاية المتتابعة تساوي الصفر.

(٢) لتكن $x_n = 2^{-n}$ ، من السهل هنا أيضا أن نتوقع أن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. لإثبات ذلك نأخذ $\varepsilon > 0$ وسنفرض أن $\varepsilon < 1$ (لو لم يكن هذا صحيحا فالبرهان أسهل). ونضع $n_0 = \left\lceil -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rceil + 1$ (لاحظ أن $\ln \varepsilon$ سالب). ينتج أن:

$$n > n_0 \implies n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \implies -n \ln 2 < \ln \varepsilon \implies 2^{-n} < \varepsilon \implies |x_n - 0| < \varepsilon$$

وهو ما يثبت أن المتتابعة المعطاة تتقارب إلى 0.

(٣) لتكن $x_n = 2^n$ ، بتجربة بعض الحدود نجد أن

n	1	2	...	10	...	100	...	10^6
عدد خانات x_n	1	1	...	4	...	30	...	≈ 301030

نتوقع إذن أن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ أي أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **تباعدية**. لإثبات ذلك: ليكن $L > 0$ معطى، نضع $n_0 = \left\lceil \frac{\ln L}{\ln 2} \right\rceil + 1$ فنجد أن

$$n > n_0 \implies n > \frac{\ln L}{\ln 2} \implies 2^n > L$$

وهو ما يثبت المطلوب.

(٤) لتكن $x_n = 1/n^r$ حيث $r > 0$ ، من الواضح أن المقام يتزايد دون حدود عندما نزيد n بينما البسط ثابت ، وبالتالي نتوقع أن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. لإثبات ذلك: ليكن $\varepsilon > 0$ معطى ، نختار $n_0 = \lceil \varepsilon^{-1/r} \rceil + 1$ فنجد

$$\begin{aligned} n > n_0 &\implies n > \varepsilon^{-1/r} \\ &\implies n^r > \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{n^r} < \varepsilon. \end{aligned}$$

وهو ما يثبت توقعنا.

المتتابعات الثابتة هي أبسط أنواع المتتابعات وجميعها تقاربية كما توضح النظرية التالية:

١.١-٤- نظرية: أي متباكة ثابتة $x_n = c \in \mathbb{R}$ تكون تقاربية ونهايتها هي c .

ن نعطي برهاناً لهذه النظرية لسهولة فهمها.

جبر النهايات والمتتابعات التقاربية

من الممكن إجراء العمليات الجبرية المعتادة على متتابعات الأعداد - كغيرها من الدوال - فلأي متابعتين $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من الأعداد الحقيقية يمكن تعريف المجموع وحاصل الضرب وخارج القسمة كما يلي:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} + (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$0 \neq y_n \text{ بشرط } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} / (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{x_n}{y_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

كما يمكن تعريف ناتج ضرب عدد حقيقي t في متتابعة من الأعداد:

$$t(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

وتعطي النظرية التالية العلاقة بين هذه العمليات الجبرية ومفهوم التقارب.

١.١-٥- نظرية: جبر المتتابعات التقاربية: لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متابعتان تقاربيتان من الأعداد الحقيقية (أو المركبة)، وليكن t عدد حقيقي. وليكن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell_1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ell_2$ ، فإن:

$$(١) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \ell_1 + \ell_2 \quad \text{تقاربية}$$

$$(٢) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \ell_1 \cdot \ell_2 \quad \text{تقاربية}$$

$$(٣) \quad \text{إذا كانت } \ell_2 \neq 0 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad \text{تقاربية}$$

$$(٤) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t x_n = t \ell_1 \quad \text{تقاربية}$$

برهان - سنثبت (١) و (٣) ونترك (٢) و (٤) كتمرين للقارئ. نفرض أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نحققان شروط النظرية. إذن لأي $\varepsilon > 0$ يوجد $n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)$ بحيث

$$n > n_1 \implies |x_n - \ell_1| < \varepsilon \quad n > n_2 \implies |y_n - \ell_2| < \varepsilon$$

$$(١) \quad \text{لأي } \varepsilon > 0 \text{ معطى نأخذ } n_0 = \max(n_1(\varepsilon/2), n_2(\varepsilon/2)) \text{ فنجد أن}$$

$$\begin{aligned} n > n_0 &\implies |x_n - \ell_1| < \varepsilon/2 \quad |y_n - \ell_2| < \varepsilon/2 \\ &\implies |x_n - \ell_1| + |y_n - \ell_2| < \varepsilon \\ &\implies |(x_n + y_n) - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{أي أن } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \ell_1 + \ell_2$$

$$(٣) \quad \text{نفرض أن } \ell_2 \neq 0 \text{ ، ونأخذ } n_3 = n_2(|\ell_2|/2)$$

$$n > n_3 \implies |y_n| \geq |\ell_2| - |\ell_2 - y_n| > |\ell_2| - |\ell_2|/2 = |\ell_2|/2$$

لم نختار

$$n_0 = \max(n_3, n_1(|\ell_2| \varepsilon/4), n_2(|\ell_2|^2 \varepsilon/4(|\ell_1| + 1)))$$

بهذا الاختيار نجد أن

$$\begin{aligned}
 n > n_1(|\ell_2| \varepsilon/4) &\implies 2|x_n - \ell_1|/|\ell_2| < \varepsilon/2, \\
 n > n_2(|\ell_2|^2 \varepsilon/4(|\ell_1| + 1)) &\implies 2|\ell_1||y_n - \ell_2|/|\ell_2|^2 < \varepsilon/2 \\
 &\text{وبالتالي} \\
 n > n_0 &\implies \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{\ell_1}{\ell_2} \right| = \left| \frac{x_n \ell_2 - y_n \ell_1}{y_n \ell_2} \right| \\
 &\leq \frac{|x_n \ell_2 - y_n \ell_1|}{|\ell_2|^2/2} : \text{وحيث أن } n_3 < n \\
 &\leq \frac{|x_n \ell_2 - \ell_2 \ell_1 + \ell_2 \ell_1 - y_n \ell_1|}{|\ell_2|^2/2} \\
 &\leq \frac{|\ell_2||x_n - \ell_1| + |\ell_1||\ell_2 - y_n|}{|\ell_2|^2/2} \\
 &\leq \frac{2|x_n - \ell_1|}{|\ell_2|} + \frac{2|\ell_1||y_n - \ell_2|}{|\ell_2|^2} \\
 &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
 \end{aligned}$$

٦.١.١ - أمثلة:

(١) ندرس تقارب المتتابعة: $x_n = \frac{2n+1}{n-3}$. نعيد كتابة الحد العام للمتتابعة على الصورة:

$$x_n = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{3}{n}}$$

نوجد نهاية كل من البسط والمقام على حدة. فنجد أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$ من خاصية جمع النهايات و $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{3}{n} = 1 - 3.0 = 1$ من نفس الخاصية. نلاحظ أن نهاية المقام لا تساوي الصفر وبالتالي فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{1} = 2$$

(٢) لتكن $x_n = p(n)/n^t$ حيث $p(n)$ كثيرة حدود من الدرجة t ، أي أن

$$p(n)n = a_0 + a_1n + \dots + a_t n^t, \quad a_0, \dots, a_t \in \mathbb{R}, a_t \neq 0, t \in \mathbb{Z}^+$$

وبالتالي نكون

$$x_n = \frac{a_0}{n^t} + \frac{a_1}{n^{t-1}} + \dots + \frac{a_{t-1}}{n} + a_t$$

من مثال سابق نعلم أن $\lim_{n \rightarrow \infty} a/n^r = 0$ لأي $a \in \mathbb{R}, r > 0$ وبالتالي باستخدام جبر النهايات نحصل على أن جميع الحدود في x_n تؤول للصفر ما عدا الحد الأخير، فيكون $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a_t$.

(٣) لتكن $x_n = p(n)/n^{t-1}$ حيث $p(n)$ كثيرة حدود من الدرجة t ، أوبالتالي نكون

$$x_n = \frac{a_0}{n^{t-1}} + \frac{a_1}{n^{t-2}} + \dots + a_{t-1} + a_t n$$

من المثال السابق نرى أن مجموع كل الحدود عدا الحد الأخير يتقارب إلى a_{t-1} ، لنفرض الآن أن $a_t > 0$ وليكن $\ell \in \mathbb{R}$ فباخذ $n > (\ell + 1 - a_{t-1})/a_t$ سنحصل على $|a_t n + a_{t-1} - \ell| > 1$ وبالتالي

$|x_n - \ell| > 1/2$ عندما تكون n . (برهن ذلك) كبيرة بما يكفي

وهو ما يثبت أن

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq l$ لأي $l \in \mathbb{R}$. أي أن المتابعة $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تباعدة.

(٤) لو كانت $x_n = n^t/p(n)$ حيث $p(n)$ كثيرة حدود من الدرجة t ، فإننا بالقسمة على n^t في البسط والمقام نحصل على $x_n = 1/(p(n)/n^t)$ وحيث أن نهاية المقام تساوي $a_t \neq 0$ ، فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{a_t}$$

(٥) لتكن $x_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ حيث p, q كثيرتي حدود من نفس الدرجة ، إي $\deg(p) = t = \deg(q)$.
يمكن أن نكتب:

$$p(n) = a_0 + \cdots + a_t n^t, \quad q(n) = b_0 + \cdots + b_t n^t$$

$$a_0, b_0, \cdots, a_t, b_t \in \mathbb{R}, a_t, b_t \neq 0, t \in \mathbb{Z}^+$$

بقسمة كل من البسط والمقام على n^t نحصل على

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p(n)/n^t)}{(q(n)/n^t)} = \frac{a_t}{b_t}$$

٧.١.١ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

(١) أي متابعة من الأعداد الحقيقية

() لا بد أن تكون تباعدية
() لا بد أن تكون تقاربية

() قد تكون تقاربية وتباعدية في نفس الوقت
() قد لا تكون لا تقاربية ولا تباعدية

$$x_n = n \text{ المتابعة (٢)}$$

() تباعدية
() تؤول للمالانهاية

(٣) إذا كانت $x_n = \sin(n)$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \left(\begin{array}{c} \text{موجودة} \\ \text{غير موجودة} \end{array} \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \left(\begin{array}{c} \text{موجودة} \\ \text{غير موجودة} \end{array} \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \quad \left(\begin{array}{c} \text{موجودة} \\ \text{غير موجودة} \end{array} \right)$$

(٤) إذا كانت $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تباعدية وكانت $z_n = x_n + y_n$ فإن $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$

() تباعدية
() تؤول للمالانهاية

۸.۱.۱ تمارین

(١) إدرس تقارب كل من المتتابعات التالية باستخدام تعريف التقارب مباشرة

$$x_n = \frac{n+1}{n^2-n+1} \quad (1)$$

$$a > 1, x_n = a^n \quad (\text{a})$$

$$a \in [0, 1[\text{ , } x_n = a^n \quad (\text{⌋})$$

$$a \leq -1, x_n = a^n \quad (\text{d})$$

$$a \in]-1, 0[\text{ , } x_n = a^n \quad (\tau)$$

$$x_n = \frac{n}{3^n} \quad (9)$$

(٢) كان استهلاك مصر من القمح 21 مليون طن عام ٢٠٠٥، وكان سعر طن القمح في ذلك العام 600 دولار أمريكي، كما كان إنتاج مصر من القمح في ذلك العام 18 مليون طن. لتكن x_n هي التكلفة السنوية لاستيراد القمح في العام $2005 + n$.

(ا) أوجد الحدود العشرة الأولى من $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بفرض أن الاستهلاك يزيد بمعدل 1.3% والأسعار تزيد بمعدل 4% سنوياً.

(ب) أوجد الحدود العشرة الأولى من $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بفرض أن الاستهلاك يزيد بمعدل 1.3% والأسعار تزيد بمعدل 4% والإنتاج المحلي يزيد بمعدل 5% سنوياً.

(ج) أوجد معدل الزيادة المطلوب في الإنتاج المحلي لكي تكتفي مصر ذاتياً في عام 2020 بفرض أن الاستهلاك يزيد بمعدل 1.3% سنوياً.

(٣) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعتان من الأعداد الحقيقية بحيث

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

برهن أن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = +\infty$

ماذا عن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - y_n$ ؟

(٤) إدرس تقارب كل من المتتابعات الآتية

$$x_n = \frac{n^2 - 5n + 1}{3n^2 - 7} \quad (ا)$$

$$x_n = a^0 + \dots + a^n \quad (و)$$

$$x_n = \frac{n^3 - 5n + 1}{3n^2 - 7} \quad (ب)$$

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad (ز)$$

$$x_n = \frac{n + 2^n}{n - 2^n} \quad (ج)$$

$$x_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \quad (ح)$$

$$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad (د)$$

$$x_n = \frac{n \cos(n\pi)}{\sin(1/n)} \quad (ط)$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \quad (هـ)$$

$$x_n = 2^n - e^n \quad (ي)$$

(٥) أعط مثالا لدالة $f(x)$ بحيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ غير موجودة لكن المتتابعة $(f(n))_n$ تقاربية.

(٦) إدرس تقارب المتتابعات $x_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ حيث p, q كثيرتي حدود.

٢.١ مقارنة النهايات

سنستخدم من الآن فصاعدا الرمز $\overline{\mathbb{R}}$ ليدل على $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ، والسبب وراء اهتمامنا بهذه المجموعة هو أن المتتابعات التقاربية أو تلك التي تتباعد لكن نهايتها تساوي $\pm\infty$ تتفق في بعض الصفات بينما تختلف عن المتتابعات المترددة أي تلك التي ليس لها نهاية على الإطلاق مثل المتتابعة $x_n = (-1)^n$.

٢.١-١ نظرية مقارنة النهايات: لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متابعتان من الأعداد الحقيقية، بحيث $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}}$. إذا كانت $x_n \leq y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

برهان. ليكن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ ، ولنفرض أن $x_n \leq y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

لنفرض جدلاً أن $\beta < \alpha$ ، يمكننا أن نجد $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث $\beta < b < a < \alpha$ من معرفتنا بأن نهاية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هي α ونهاية $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هي β فيوجد n_1, n_2 بحيث:

$$n > n_1 \implies x_n > a, \quad n > n_2 \implies y_n < b$$

لكن هذا يستلزم أن $y_n < x_n$ لأي $\max(n_1, n_2) > n$ وهو ما يناقض الفرض بأن $x_n \leq y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

٢.٢.١ - نتيجة (نظرية الحصر): لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثلاث متتابعات من الأعداد الحقيقية بحيث

$$x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$.

برهان - من النظرية السابقة نجد أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

وبالتالي فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$.

٣.٢.١ - أمثلة:

(١) المتابعة $x_n = 2^n + n^2$ نؤول إلى $+\infty$ ، لأن $2^n + n^2 > 2^n$ وقد أثبتنا باستخدام تعريف النهاية أن $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$.

(٢) المتابعة $z_n = \frac{e^n + n + 6}{e^n + n + 5}$ نؤول إلى 1 ، لأن $1 \leq z_n \leq y_n = 1 + \frac{1}{n}$ وكل من $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نؤول إلى 1.

٤.٢.١ - تعريف (المتتابعات المحدودة): لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية، نقول أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $|x_n| \leq M$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

٥.٢.١ - ملاحظة هامة: من السهل ملاحظة أن أي متتابعة تقاربية تكون بالضرورة محدودة (تمرين للقارئ).

٦.٢.١ - نتيجة: ضرب متتابعة صفيرية في متتابعة محدودة: إذا كانت $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعات من الأعداد الحقيقية بحيث $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة محدودة ، فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

برهان - ليكن $|y_n| \leq M$ فإن $|x_n y_n| \leq M |x_n|$ ، لكن من جبر النهايات نعلم أن $\lim_{n \rightarrow \infty} M |x_n| = 0$ ومن نظرية الحصر نجد أن $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n| = 0$.

٧.٢.١ - أمثلة:

(١) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n / n = 0$ لأن $(-1)^n$ متتابعة محدودة و $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ نؤول للصفر.

(٢) $\sin(n)/n \rightarrow 0$ لأن $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة محدودة و $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ نؤول للصفر.

٨.٢.١ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

(١) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعات من الأعداد الحقيقية بحيث:

$$|x_n| \leq y_n \quad \forall n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$$

فإن

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تباعدية} \\ a = +\infty \implies (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تباعدية} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} a = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \\ a = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(٢) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعتان من الأعداد الحقيقية بحيث:

$$1 \leq \frac{x_n}{y_n} \leq 2 - \frac{1}{y_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تكون تقاربية إذا كانت

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية	$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تباعدية
$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تؤول للواحد	$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تؤول للمالانهاية

(٣) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعتان من الأعداد الحقيقية بحيث:

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| \leq M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تكون تقاربية إذا كانت

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية	$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تباعدية
$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تؤول للصفر	$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة

٩.٢.١ تمارين

(١) أوجد نهاية كل من المتتابعات التالية

$x_n = \frac{n!}{n^n}$ (ا)	$x_n = \sqrt[n]{n}$ (هـ)
$x_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ (ب)	$x_n = \sqrt[n]{n^3}$ (و)
$x_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$ (ج)	$x_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$ (ز)
$a > 0, x_n = a^{1/n}$ (د)	$x_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$ (ح)

(٢) لتكن $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n \geq k \geq 0$ أوجد نهاية $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_k^n}$

(٣) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعتان من الأعداد الحقيقية بحيث:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

برهن أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad (ا)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \quad (ب)$$

(٤) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية بحيث:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$$

برهن أن

$$\ell < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad (ا)$$

$$\ell > 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad (ب)$$

(٥) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية بحيث:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \ell$$

برهن أن

$$\ell < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad (\text{ا})$$

$$\ell > 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad (\text{ب})$$

(٦) لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابة من الأعداد الحقيقية بحيث:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \ell$$

برهن أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$$